RODOLFO GUIDOBONO — CURSO TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS — EJERCICIO CAPÍTULO 85 — JAVIER GARCÍA

EJERCICIO 1 (37:51)

a) Siendo "a" y "b" son partículas colisionando en un eje "z", demostrar que

$$\boldsymbol{E_a E_b |v_a - v_b| = \sqrt{(E_b p_a - E_a p_b)^2}}$$

b) Verificar que $\boldsymbol{E_b p_a - E_a p_b}$ es invariante Lorentz

Una partícula con velocidad *v*, tiene un momento relativista:

[1] $p = m\,v = \gamma\, m_0 v$

Donde: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

Como (c=1):

$$E^2 = {m_0}^2 + p^2 = {m_0}^2 + (\gamma\, m_0 v)^2 = {m_0}^2\left(1 + \frac{1}{1-v^2}v^2\right) = {m_0}^2\frac{1-v^2+v^2}{1-v^2} = {m_0}^2\frac{1}{1-v^2} = {m_0}^2\gamma^2$$

[2] $E = \gamma\, m_0$

Haciendo [1] / [2]

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma\, m_0 v}{\gamma\, m_0} = v$$

$$E_a E_b |v_a - v_b| = E_a E_b \left|\frac{p_a}{E_a} - \frac{p_b}{E_b}\right| = E_a E_b \frac{p_a}{E_a} - E_a E_b \frac{p_b}{E_b} = E_b p_a - E_a p_b$$

Demostrando entonces lo buscado en a):

$$\boxed{\boldsymbol{E_a E_b |v_a - v_b| = \sqrt{(E_b p_a - E_a p_b)^2}}}$$

Para verificar que $E_b p_a - E_a p_b$ es invariante Lorentz buscamos que en un sistema inercial prima moviéndose a velocidad *u* se llega al mismo valor, es decir:

$$E_b p_a - E_a p_b = E'_b p'_a - E'_a p'_b$$

La transformación de Lorentz para un sistema de referencia moviéndose a velocidad V es $\Lambda = \gamma\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -\beta & 1\end{pmatrix}$

$\beta = V$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\begin{pmatrix}1 & -V\\ -V & 1\end{pmatrix}$$

Los cuadrimomentos en el nuevo sistema de referencia son:

$$\mathbb{P}'_a = \begin{pmatrix}E'_a\\ p'_a\end{pmatrix} = \Lambda\,\mathbb{P}_a = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\begin{pmatrix}1 & -V\\ -V & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_a\\ p_a\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\begin{pmatrix}E_a - Vp_a\\ -VE_a + p_a\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}'_b = \begin{pmatrix} E'_b \\ p'_b \end{pmatrix} = \Lambda\, \mathbb{P}_b = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_b \\ p_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \begin{pmatrix} E_b - Vp_b \\ -VE_b + p_b \end{pmatrix}$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(E_b - Vp_b)\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(-VE_a + p_a) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(E_a - Vp_a)\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(-VE_b + p_b)$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \frac{1}{1-V^2}(E_b - Vp_b)(-VE_a + p_a) - \frac{1}{1-V^2}(E_a - Vp_a)(-VE_b + p_b)$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \frac{1}{1-V^2}\{(E_b - Vp_b)(-VE_a + p_a) - (E_a - Vp_a)(-VE_b + p_b)\}$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \frac{1}{1-V^2}\{-E_bVE_a + Vp_bVE_a + E_bp_a - Vp_bp_a + E_aVE_b - Vp_aVE_b - E_ap_b + Vp_ap_b\}$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \frac{1}{1-V^2}\{Vp_bVE_a + E_bp_a - Vp_aVE_b - E_ap_b\}$$

$$E'_b p'_a - E'_a p'_b = \frac{1}{1-V^2}\{E_bp_a - E_ap_b - V^2(E_bp_a - E_ap_b)\} = \frac{1}{1-V^2}(1-V^2)(E_bp_a - E_ap_b)$$

$$\boxed{\boldsymbol{E'_b p'_a - E'_a p'_b = E_b p_a - E_a p_b}}$$